*Bienvenue !*

*Visiter*

# *“Physique Fine enjah “*

*sur youtube*

*Pour plus comprendre le cours*

# Pendule Simple

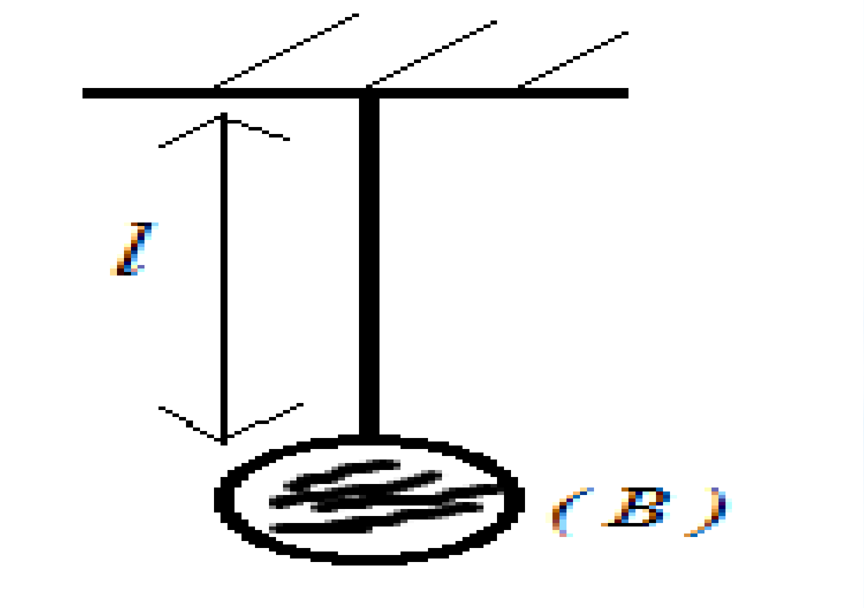
**

*Khaled Soubra - Terminal*

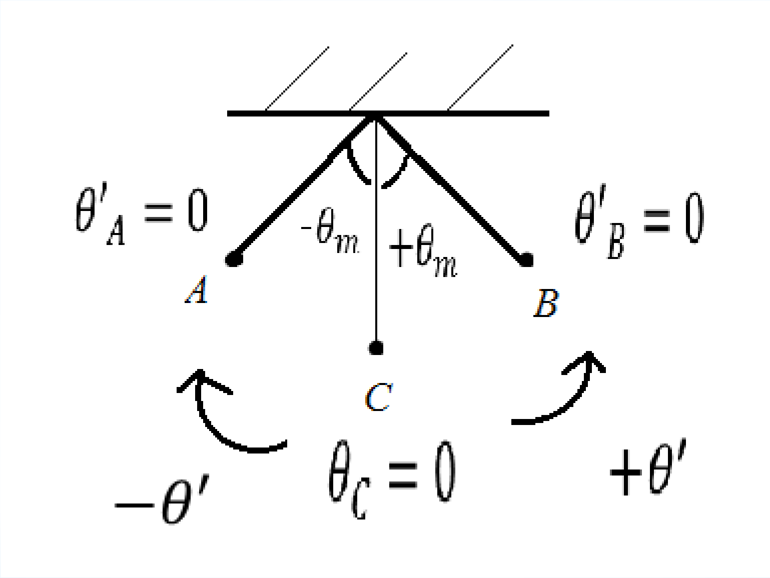
- *Définition :*

- *Un pendule simple est formé d'un fil inextensible de longueur l et de masse négligeable , porte à l'une de ces deux éxtrémités une masse ponctuelle ( Particule ) de masse m .*

- *On néglige la résistance de l'air ( Frottement ) .*



➢ <u>Mouvement :</u> *On écarte le pendule d'un angle* $\theta_m$ , et on le lâche *sans vitesse initiale* $\theta'_0 = 0$ . *La particule ( B ) effectue des oscillations libres non amorties entre* $-\theta_m$ et $+\theta_m$ .
( *Mouvement harmonique simple* ) .



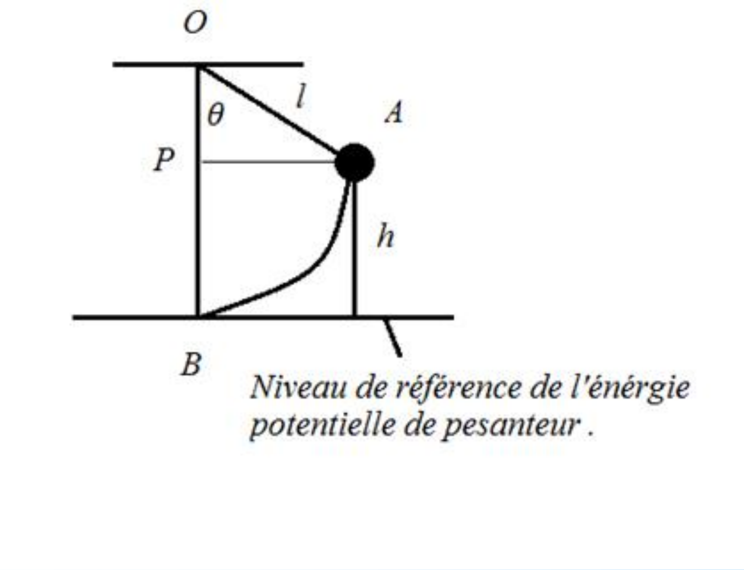

➢ *Le sens positif de rotation est ou bien choisit dans le donnée du question , ou bien par nous .*

## ➢ *Etude théorique:*

### *Expréssion de l'énergie mécanique :*

*Sys : { Pendule simple , terre } ,*

$E_m = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2} I\theta'^2 + mgZ$ ,




*Or , Z est positif car le mouvement de la particule est toujours au –dessus du niveau de référence de l'*$E_{PP}$ .

➢ $Z = +h = PB = OB - OP$

✓ *Mais ,* $cos\theta = \frac{OP}{OA} = \frac{OP}{l} \Rightarrow OP = lcos\theta$ ,

*Et OB =l , donc :*

$Z = l - lcos\theta = l(1 - cos\theta\ )$

- ✓ *Le moment d'inertie d'une particule par rapport à un axe distante de L est* $I = mL^2$
- ➢ On aura : $E_m = \frac{1}{2} mL^2\theta'^2 + mgl(1 - cos\theta)$ .

- ➢ <u>Rq:</u> Si $\theta_m$ est faible , càd $\theta_m < 10^0 = 0.17\ rd$ , on considère :

$$cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}\ (\text{ en rd })\ ,\ \text{et}\ sin\theta = \theta\ (\text{ en rd }) .$$

On suppose que $\theta_m$ $est\ faible$ , alors : $E_m = \frac{1}{2} mL^2\theta'^2 + \frac{mgl}{2}\theta^2$ .

- ➢ <u>Equation différentielle:</u>

$\overrightarrow{fr} = \vec{0} \Rightarrow E_m = constante \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$ ,

Donc: $\frac{1}{2} mL^2 2\theta'\theta" + \frac{mgl}{2} 2\theta\theta' = 0$ simplifié par $m\ l\ \theta'$ , on aura :

$L\theta" + g\theta = 0 \Rightarrow \theta" + \frac{g}{l}\theta = 0$ .

- *On peut faire le remplacement en $\theta$ , après détérminé l'équation différentielle , càd : pour* $E_m = \frac{1}{2}mL^2\theta'^2 + mgl(1 - cos\theta) = \frac{1}{2}mL^2\theta'^2 + mgl - mgl(cos\theta)$

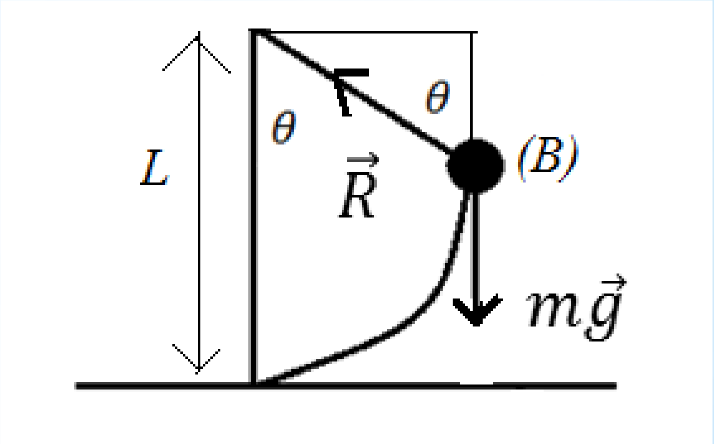
$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mL^2 2\theta'\theta'' + 0 + mgl(\theta' sin\theta) = 0$ ,

*Alors :* $L\theta'' + g(sin\theta) = 0 \Rightarrow \theta'' + \frac{g}{L}sin\theta = 0$ *mais* $\theta_m$ *faible , alors* $sin\theta = \theta(rd)$*,*
*Donc :* $\theta'' + \frac{g}{L}\theta = 0$ *, C'est la même.*

- ✓ *C'est une équation différentielle du second ordre et de la forme* $\theta'' + {\omega_0}^2\theta = 0$ *, avec* ${\omega_0}^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ *, et de période propre* $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ *.*

- *Etude théorique:* *Deuxième loi de Newton :*

*Sys : { Particule } , Force extérieurs : Poids $m\vec{g}$ , et réaction de l'axe de rotation : $\vec{R}$ , le sens positif de rotation est le sens trigonométrique .*




$$\sum M_{\overrightarrow{Fext}} = \frac{d\sigma}{dt} \Rightarrow M_{m\vec{g}} + M_{\vec{R}} = I\theta“$$

*Alors :* $-mglsin\theta + 0 = mL^2\theta“$ ,

*Le moment de $\vec{R}$ est nul car elle passe par l'axe .*

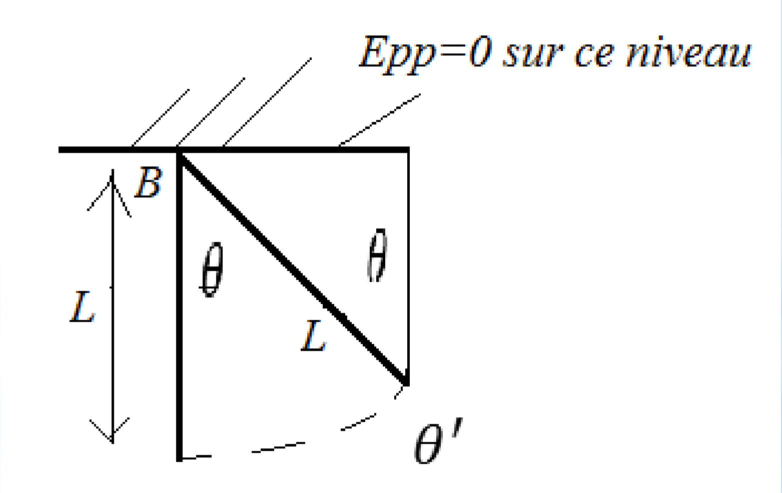
*Donc :* $L\theta" + gsin\theta = 0 \Rightarrow \theta" + \frac{g}{L}(sin\theta) = 0$

*Mais* $\theta_m$ $est\ faible\ , alors : sin\theta = \theta\ (rd)$ ,

*Donc :* $\theta" + \frac{g}{L}\theta = 0$ *( même équation ) .*

➢ *Problème fondamentale:*

*Un pendule simple est formé d'un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable porte à l'éxtrémité inférieur une particule ( S ) de masse m . Le niveau de référence de l'énergie potentielle de pesanteur est un plan horizantale passant l'éxtrémité supérieur B de la fil . On écarte ( S ) d'un angle* $\theta_m = 0.12rd$ *, puis on le lâche sans vitesse initiale à* $t_0 = 0$ *. À un instant t quelconque , la position angulaire de ( S ) est détérminer par l'angle* $\theta$ *, et sa vitesse angulaire est donnée par* $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$ *. Prendre* $\pi^2 = 10$ *.*



- **Partie : A**

1. *Ecrire l'éxpréssion de l'énérgie mécanique du système étudié en fonction de m , L , g et $\theta'$ .*

Sol: Sys: { Pendule simple , terre } , $E_m = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2}I\theta'^2 + mgZ$

$E_m = \frac{1}{2}mL^2\theta'^2 - mg(Lcos\theta)$ .

2. *Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement de ( S ) . On néglige les frottements .*

Sol: Sys : { Pendule simple , terre } , $\overrightarrow{fr} = \vec{0}$ , donc $E_m = cte \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$

Alors : $\frac{1}{2}mL^2 2\theta'\theta" + mgL\theta' sin\theta = 0 \Rightarrow L\theta" + gsin\theta = 0 \Rightarrow \theta" + \frac{g}{L}sin\theta = 0$ .

Mais $\theta_m = 0.12rd < 0.17rd$ , alors $\theta_m$ est faible , donc $sin\theta = \theta(rd)$ ,

Parsuite $\theta" + \frac{g}{L}\theta = 0$ .

3. *La solution de cette équation différentielle est* $\theta = \theta_m cos(\omega_0\, t + \varphi)$ .
*Détérminer l'éxpréssion de* $\omega_0$ *, et la valeur de* $\varphi$ *.*

*Sol:*

✓ $\theta'' + \frac{g}{L}\theta = 0$

*c'est une équation différentielle du second ordre de la forme* $\theta'' + {\omega_0}^2\theta = 0$ *, de solution*$\theta = \theta_m cos(\omega_0\, t + \varphi) \Rightarrow \theta' = -\omega_0\theta_m sin(\omega_0\, t + \varphi)$

*Alors* $\theta'' = -{\omega_0}^2\theta_m cos(\omega_0\, t + \varphi) = -{\omega_0}^2\ \theta$ *, Donc :* $\theta'' + {\omega_0}^2\theta = 0$ *,*

*Alors on a vérifier par identification que* $\omega_0$ *dans la solution donée est celle dans la forme de l'équation différentielle , alors* $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ *.*

✓ *À* $t_0 = 0$ *, on a* $\theta = \theta_m$ *, alors :* $\theta_m = \theta_m cos\varphi$*, alors* $cos\varphi = 1$ *,*
*Alors* $\varphi = 0$ *.*

✓ *Donc :* $\theta = 0.12cos(\sqrt{\frac{g}{L}}\ t\ )$ *.*

4. *Montrer que les oscillations sont indépendantes de la masse m de ( S ) .*

<u>*Sol:*</u> *La période des oscillations est* $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ *, $T_0$ sont indépendante de la masse m de ( S ) .* *C.q.f.d*

5. *On mesure le temps de 10 oscillations , on le trouve 20 ( s) .*

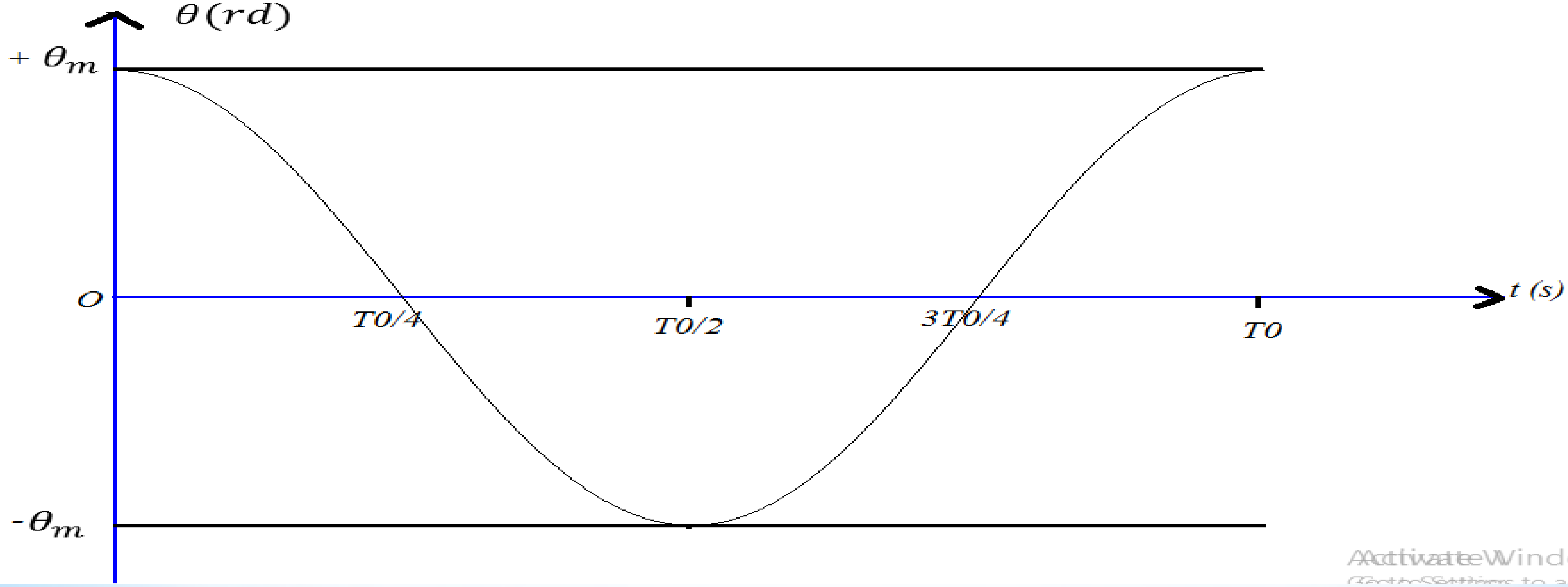
➢ *Détérminer la longueur L du pendule .*

<u>*Sol:*</u> $10T_0 = 20$ *, alors :* $T_0 = 2(s)$ *, donc* $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2 \Rightarrow \frac{\pi^2 L}{g} = 1 \Rightarrow L = 1m$ *.*

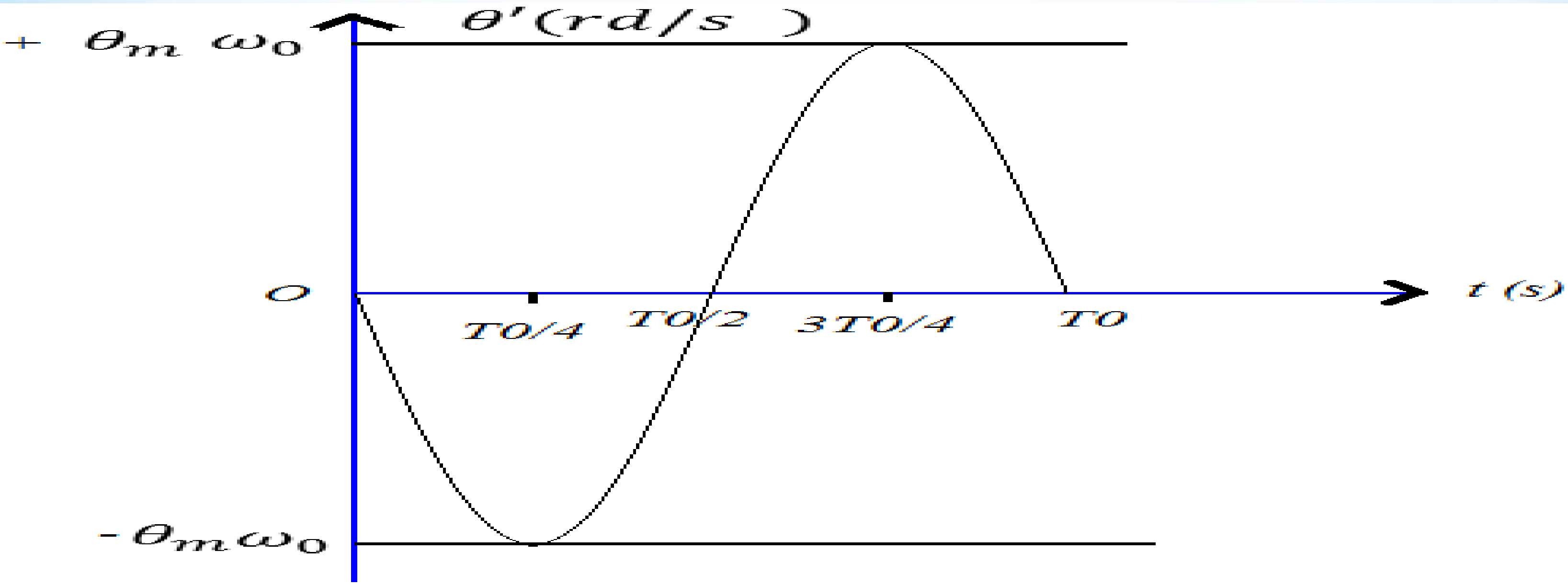
6. *Tracer l'allure de $\theta$ et $\theta'$ en fonction du temps .*

<u>*Sol:*</u>

$\theta = 0.12cos(\sqrt{10}\,t)$ *et* $\theta' = -0.12\sqrt{10}sin(\sqrt{10}\,t)$



θ(rd)
+ θm
O
-θm
T0/4
T0/2
3T0/4
T0
t (s)

θ'(rd/s )
+ θm ω0
O
- θm ω0
T0/4
T0/2
3T0/4
T0
t (s)

- ***Partie:B***

*En réalité le frottement n'est plus négligeable , et la puissance du frottement est* $P_{\overrightarrow{fr}} = -C\theta'^2$ *avec C est une constante positive .*

1. *Utiliser la relation* $\frac{dE_m}{dt} = P_{\overrightarrow{fr}}$ *, pour détérminer l'équation différentielle .*

- *Sol: Sys: { Pendule simple ,terre } ,*

$E_m = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2}mL^2\theta'^2 - mgl(cos\theta)$ ,
$\frac{dE_m}{dt} = P_{\overrightarrow{fr}}$ *, alors* $\frac{1}{2}mL^2 2\theta'\theta'' + mgl\theta' sin\theta = -C\theta'^2$ ,

*Alors* $mL(L\theta'' + gsin\theta) = -C\theta' \Rightarrow L\theta'' + gsin\theta + \frac{C}{mL}\theta' = 0$

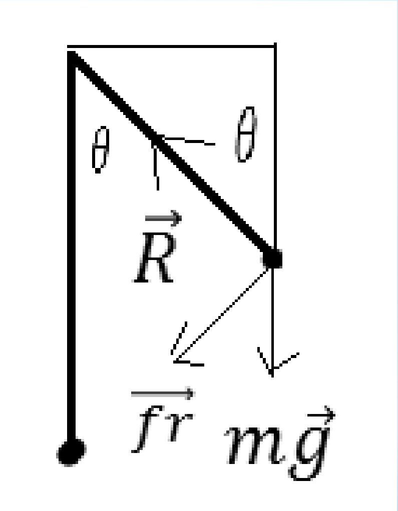
*Donc :* $\theta'' + \frac{C}{mL^2}\theta' + \frac{g}{L}\theta = 0$ , ( $car\ \theta_m\ est\ faible\ alors\ sin\theta = \theta(rd)$) .

*C'est l'équation différentielle .*

2. *Vérifier la deuxième loi de Newton .*

*<u>Sol:</u> Sys : { ( S ) } , Mot – clé  Idée : chercher* $\sum M_{\overrightarrow{Fext}}$ =? ?

*Càd :* $\sum M_{\overrightarrow{Fext}} = M_{m\vec{g}} + M_{\vec{R}} + M_{\overrightarrow{fr}}$ *, Or la réaction* $\vec{R}$ *passe par l'axe et sont moment est alors zéro .*




*Donc :* $\sum M_{\overrightarrow{Fext}} = -mglsin\theta + 0 - C\theta' = -mgl\theta - C\theta'$

*D'après l'équation différentielle on a:*

$mL(L\theta" + gsin\theta) = -C\theta'$ *, sin* $(\theta) = \theta$ *alors*

$mgl\theta + mL^2\theta" = -C\theta' \Rightarrow -mgl\theta - C\theta' = mL^2\theta"$

*Donc* $\sum M_{\overrightarrow{Fext}} = I_{Particule}\theta" = \frac{d\sigma}{dt}$ .   *C.q.f.d*